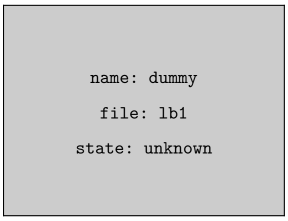
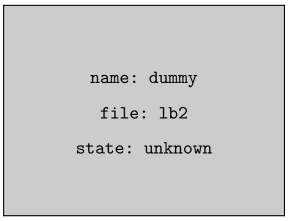
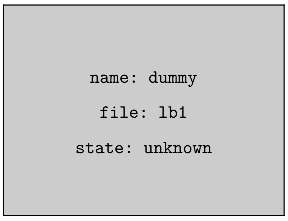


a1



a2

a



b1

b

Figura 13 An example of `\startcombination`....

definició i algunes propietats. Ens restringirem a productes lliures de dos grups (es poden consultar diverses referències per a la definició general per a famílies arbitràries de grups [11, 29]).

Abans de tot, notem que si G i H són grups, sempre podem suposar que $G \cap H = \{1\}$, ja que els podem substituir per grups isomorfs G' i H' tals que $G' \cap H' = \{1\}$: per exemple, podem agafar $G' = \{1\} \cup ((G \setminus \{1_G\}) \times 2)$ i $H' = \{1\} \cup ((H \setminus \{1_H\}) \times 3)$ amb les operacions induïdes per les bijeccions $\phi\colon G \to G'$ i $\theta\colon H \to H'$ (per exemple, en G', $xy = \phi(\phi^{-1}(x) \cdot \phi^{-1}(y))$, per a tots $x, y \in G'$).

D'altra banda, notem que, com que G i H són grups, aleshores el monoide lliure $(G \cup H)^*$ conté les inverses formals de les paraules sobre $G \cup H$ (ja que $G^{-1} = G$ i $H^{-1} = H$).

Definició 39. Siguin G_1, G_2 dos grups tals que $G_1 \cap G_2 = \{1\}$. Dins el monoide lliure $(G_1 \cup G_2)^*$, considerem la relació d'equivalència $\sim_*$ definida per: $u \sim_* v$ si, i només si, podem passar d'una a l'altra amb un nombre finit de passes de les operacions següents:

1. La inserció o eliminació de l'element neutre 1.
2. Contracció: la substitució d'una ocurrència $g_1 g_2$ (com a paraula) pel producte $g_1 \cdot g_2$, amb g_1, g_2 dins el mateix grup G_i, amb $i \in \{1, 2\}$.
3. Expansió: la substitució d'un element g de G per $g_1 g_2$ (com a paraula) amb $g_1 \cdot g_2 = g$ dins qualque G_i, $i \in \{1, 2\}$.

$(G \cup H)^* / \sim_*$ forma un grup, el qual anomenarem *producte lliure de G_1 i G_2* i indicarem amb $G_1 * G_2$.